Calcul d'une intégrale par le théorème des résidus

Leçons concernées : 204 236 245 267

Lemme 1. *Soient* $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ *et* $a \in \mathbb{C}$. *On pose* $\gamma_{a,r} : t \longmapsto a + re^{it}$ *sur* $[\alpha, \beta]$. *Soit* f *holomorphe sur* $B(a,R) \setminus \{a\}$ *pour* $R > 0$, *tel que* a *soit un pôle simple de* f. *Alors :*

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_{a,r}} f(z)\, dz = (\beta - \alpha) i \operatorname{Res}(f, a)$$

Démonstration.

Posons $g : z \longmapsto f(z) - \frac{\operatorname{Res}(f,a)}{z-a}$. Ainsi g est holomorphe en a, et il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ tels que $|g| \leqslant M$ sur $B(a, \rho) \setminus \{a\}$. On obtient ainsi :

$$\left| \int_{\gamma_{a,r}} g(z)\, dz \right| \leqslant M(\beta - \alpha) r \qquad \text{et} \qquad \int_{\gamma_{a,r}} \frac{\operatorname{Res}(f,a)}{z-a}\, dz = \int_\alpha^\beta \operatorname{Res}(f,a) i\, dz = (\beta - \alpha) i \operatorname{Res}(f,a)$$

Le résultat vient alors par linéarité de l'intégrale. ☐

Théorème 2. *Soit* $\alpha \in]-1, 1[$. *Alors* $I_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1}\, dx = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\alpha\pi}{2})}$.

Démonstration.

Étape 1 : Vérifions que I_α est bien définie.

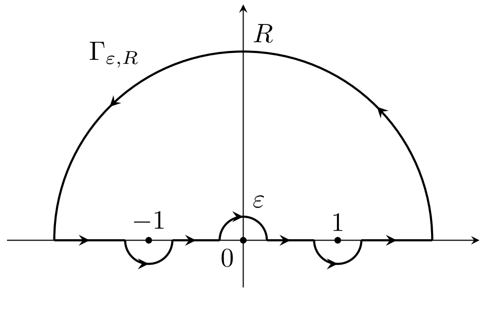
Puisque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\ln x = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\varepsilon}\right)$ en 0^+, et $\ln x = \mathrm{o}\left(x^\varepsilon\right)$ en $+\infty$, on a :

$$\frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1} \underset{0^+}{\sim} x^\alpha \ln x = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{\varepsilon - \alpha}}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1} \underset{+\infty}{\sim} x^{\alpha - 2} \ln x = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^{2 - (\alpha + \varepsilon)}}\right)$$

Ainsi, en prenant $0 < \varepsilon < 1 - \alpha$, on a que la fonction est bien intégrable en 0 et en $+\infty$. De plus, en 1, on a $\ln x = \ln(1 + x - 1) \sim x - 1$, donc $\frac{x^\alpha \ln x}{x^2 - 1} \sim \frac{x^\alpha}{(x+1)} \sim \frac{1}{2}$. Ainsi, la fonction est continue en 1, donc sur $\mathbb{R}$.

Étape 2 : Cherchons à appliquer le théorème des résidus.

Considérons Log une détermination du logarithme complexe définie sur $U = \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$ telle que $\operatorname{Log}(1) = 0$, et définissons $z^\alpha = \exp(\alpha \operatorname{Log}(z))$ pour $z \in U$. Posons également la fonction $f : U \to \mathbb{C}$ définie pour $z \in U$ par $f(z) = \frac{z^\alpha \operatorname{Log}(z)}{z^2 - 1}$. C'est une fonction méromorphe ayant pour pôles -1 et 1 qui sont au plus simples. Pour $\varepsilon > 0$ et $R > 0$, on peut donc considérer le chemin $\Gamma_{\varepsilon,R}$ suivant :



Étape 3 : Étude sur $\gamma_{0,r}$.

Soient $r > 0$ et $t \in [0, \pi]$. On a :

$$|\operatorname{Log}(re^{it})| = |\ln r + it| \leqslant |\ln r| + \pi \qquad \text{et} \qquad |(re^{it})^2 - 1| \geqslant \big||r^2 e^{2it}| - |-1|\big| = |r^2 - 1|$$

On obtient ainsi :

$$\left|\int_{\gamma_{0,r}} f(z)dz\right| = \left|\int_0^\pi ire^{it} f(re^{it})dt\right| \leqslant \int_0^\pi r\frac{|(re^{it})^\alpha||\operatorname{Log}(re^{it})|}{|(re^{it})^2-1|}dt \leqslant \int_0^\pi r\frac{r^\alpha(|\ln r| + \pi)}{|r^2-1|}dt = \frac{\pi r^{\alpha+1}(|\ln r| + \pi)}{|r^2-1|}$$

L'intégrale tend alors vers 0 en faisant tendre r vers 0 ou $+\infty$.

Étape 4 : Calculs des résidus de f en -1, 0 et 1.

On a :

$$\operatorname{Res}(f, -1) = \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z^\alpha \operatorname{Log}(z)}{z^2+1} = \lim_{z\to -1}\frac{z^\alpha \operatorname{Log}(z)}{z-1} = \frac{(-1)^\alpha \operatorname{Log}(-1)}{-2} = \frac{-i\pi}{2}e^{i\pi\alpha}$$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z^\alpha \operatorname{Log}(z)}{z^2+1} = \lim_{z\to 1}\frac{z^\alpha \operatorname{Log}(z)}{z+1} = 0$$

Étape 5 : Conclusion.

On a vu que les intégrales de f sur $\gamma_{0,R}$ et $\gamma_{0,\varepsilon}$ tendent vers 0 lorsque ε tend vers 0 et R tend vers $+\infty$. De plus, par le théorème des résidus et passage à la limite, on a :

$$\frac{\pi^2 e^{i\pi\alpha}}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1}\,dx = \pi^2 e^{i\pi\alpha} \quad \text{donc} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{2}e^{i\pi\alpha}$$

Or, on a par définition de Log :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^\alpha \operatorname{Log}(x)}{x^2-1}\,dx = (-1)^\alpha \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^\alpha \ln|x|}{x^2-1}\,dx + (-1)^\alpha i\pi \int_{-\infty}^0 \frac{|x|^\alpha}{x^2-1}\,dx = e^{i\pi\alpha} I_\alpha + e^{i\pi\alpha} i\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2-1}\,dx$$

Il vient alors que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1}\,dx = e^{i\pi\alpha} I_\alpha + e^{i\pi\alpha} i\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2-1}\,dx + I_\alpha = \frac{\pi^2}{2}e^{i\pi\alpha}$$

On a donc :

$$\frac{1+e^{i\pi\alpha}}{e^{i\pi\alpha}} I_\alpha + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2-1}\,dx = (1+e^{-i\pi\alpha}) I_\alpha + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^2-1}\,dx = \frac{\pi^2}{2}$$

En prenant la partie réelle, on obtient finalement :

$$I_\alpha = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{\operatorname{Re}(1+e^{-i\pi\alpha})} = \frac{\pi^2}{2}\frac{1}{1+\cos(\pi\alpha)} = \frac{\pi^2}{4\cos^2(\frac{\pi}{2}\alpha)}$$

□

Références

[Tau06] P. Tauvel. *Analyse complexe pour la licence 3*. Dunod